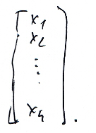
Literatura:

1. G.Strang „Linear algebra with applications”/”… and its aplications”(1988) (znalazłam to też pod takim tytułem)
2. G.Banaszak, W.Gajda „Elementy Algebry Liniowej I, II”(2002)
3. A.Sołtysiak „Algebra Liniowa” (2002)

Jednym z podstawowych pojęć w matematyce jest pojęcie zbioru. Jest to pojęcie pierwotne, a więc takie, którego nie definiujemy. Zbiory pojawiają się gdy mamy pewną liczbę obiektów – obiekty, które należą do danego zbioru będziemy nazywać jego elementami. W matematyce korzystne jest wprowadzenie pojęcia zbioru pustego, który nie zawiera żadnego elementu – zbiór pusty będziemy oznaczać symbolem ∅. To, że x jest elementem zbioru X albo że x należy do X, będziemy oznaczać krótko x ∈ X, natomiast to że zbiór Y jest podzbiorem zbioru X (lub że Y zawiera się w X), zapiszemy w postaci Y ⊂ X. Wreszcie, to że x nie jest elementem zbioru X zapiszemy jako x ∉ X.

Na zbiorach określa się działania – np. dodawania, odejmowania, mnożenia itp. Ich efektem są nowe zbiory utworzone z danych zbiorów. Jest jeszcze jeden sposób tworzenia nowych zbiorów za pomocą danych zbiorów – mianowicie operacja tworzenia iloczynu kartezjańskiego. Dla zdefiniowania tej operacji potrzebujemy pojęcia pary uporządkowanej. Mając dowolne obiekty *a* i *b* możemy z nich utworzyć parę uporządkowaną o porządku a i porządku b, które będziemy oznaczać symbolem (a,b). Parę uporządkowaną (a,b) uważamy za różną od pary uporządkowanej (b,a), jeśli tylko a ≠ b. Pary uporządkowane (a,b) i (c,d) uważamy za równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe poprzedniki i następniki, tj. gdy a=c i b=d.

 *Def.* Iloczynem kartezjańskim (produktem kartezjańskim) zbiorów X i Y nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (x,y) takich, że x ∈ X i y ∈ Y. Zbiór ten oznaczamy przez X × Y,   
tj. X × Y = {(x,y): x ∈ X, y ∈ Y}.  
Ogólniej, jeśli dane są zbiory X1, X2,…,Xn, n ≥ 2, to ich iloczynem kartezjańskim jest zbiór  
X1 × X2 × … × Xn = {(x1, x2, … , xn): x1 ∈ X1, x2 ∈ X2, … , xn ∈ Xn}.  
W szczególności, jeśli Xi = X, i = 1, … n, to zamiast X × X × … × X piszemy Xn.  
W szczególności, jeżeli X = R (liczba rzeczywista) jest zbiorem liczb rzeczywistych, to zbiór Xn = Rn składa się ze wszystkich układów u liczb rzeczywistych (x1, x2, …, xn). Elementy (x1, x2, …, xn) iloczynu kartezjańskiego Xn będziemy często zapisywać w postaci kolumny (obrazek obok 🡪)  
Element (x1, x2, …, xn) nazywamy punktem zbioru Xn, a liczby xi, i=1, …, n, nazywamy współrzędnymi   
lub składowymi punktu (x1, x2, …, xn).

Zajmujemy się obecnie relacjami między elementami zbiorów – przykładem takich relacji   
jest nierówność x ≤ y w zbiorze R.

*Def*. Relacją między elementami zbiorów X i Y nazywamy dowolny zbiór par uporządkowanych (x,y), gdzie x ∈ X i y ∈ Y. Jeżeli R jest relacją, to zbiór poprzedników par uporządkowanych tworzących R nazywamy dziedziną relacji R, a zbiór następników tych par – zbiorem wartości relacji R. Zatem relację R można interpretować jako podzbiór produktu kartezjańskiego X × Y. Zamiast pisać (x,y) ∈ R, często pisze się xRy i czyta, że x jest w relacji R z Y. Jeżeli R ⊂ Xz (to chyba jest z, ale nie jestem pewna czy nie 2), to mówimy że relacja R jest określana w zbiorze X.

Relację R określoną w zbiorze X nazywamy relacją równoważności, jeżeli posiada ona następujące własności:

* (z) dla każdego elementu x ∈ X: xRx – zwrotność
* (s) dla dowolnych elementów x, y ∈ X: jeśli xRy, to yRx – symetria
* (P) dla dowolnych elementów x, y, z ∈ X: jeśli xRy i yRz, to xRz – przechodniość

Relacje równoważności odgrywają **bardzo** dużą rolę w matematyce.  
***Uwaga.*** Zamiast xRy możemy też pisać x~y.

Jeżeli ~ jest relacją równoważności w zbiorze X, to zbiór [y] = {x ∈ X: x ~ y} nazywamy klasą abstrakcji (warstwą) elementu y względem relacji ~. Zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji ~ będziemy oznaczać symbolem X/~ (serio…? Jakiegoś symbolu nie mogli znaleźć?).  
***Uwaga.*** Klasy relacji~ mają dane własności:

* x ∈ [x]
* x1 ~ x2 wtedy i tylko wtedy, gdy [x1] = [x2]
* Jeśli x1 ~ x2 nie zachodzi, to klasy [x1] i [x2] są rozłączne

***Twierdzenie(!!! Ważne) – Zasada abstrakcji***  
 Relacja równoważności ~ określona w niepustym zbiorze X ustala podział (musiałam to wstawić – spędziłam nad tym minutę mojego życia) tego zbioru na rozłączne, niepuste podzbiory (na klasy abstrakcji tej relacji) takie, że dwa elementy x, y zbioru X należą do tej samej klasy abstrakcji wtedy i tylko wtedy, gdy x ~ y.

***Uwaga*.** Przy przejściu od elementów x, y zbioru X do klas abstrakcji [x], [y] relacja równoważności zostaje przekształcona w relację równości. Metoda ta jest często stosowana w matematyce. Jest ona nazywana metodą identyfikacji elementów równoważnych.

Omówimy teraz pojęcie funkcji, które jest podstawowe nie tylko dla matematyki.

*Def*. Niech X i Y będą dowolnymi, niepustymi wzorami. Funkcją f określaną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi x ∈ X dokładnie jednego elementu y ∈ Y. Piszemy wówczas f: X 🡪 Y. W tym przypadku zbiór X nazywa się dziedziną funkcji, jego elementy argumentami funkcji, a element y, odpowiadający elementowi x, wartością funkcji f dla elementu x (obrazem elementu x poprzez funkcję f). Stosujemy oznaczenie y = f(x). Zbiór  
 *f(X) = { y ∈ Y: y = f(x) dla pewnego x∈ X}*  
wszystkich wartości funkcji na elementach zbioru X nazywamy zbiorem wartości funkcji f lub obrazem zbioru X poprzez funkcję f. Zamiast mówić funkcja używa się równości innych terminów, tj. odwzorowanie, operator, przekształcenie, itp.

***Uwaga*.** Definicja funkcji wymaga określenia trójki (X, Y, f): X – dziedzina funkcji, f – „przepis”, który każdemu x ∈ X przyporządkowuje dokładnie jeden element x ∈ Y, Y – zbiór, w którym znajdują się wartości funkcji.

***Uwaga***. Jeżeli f: X 🡪 Y i A ⊂ X, to symbolem f|A oznacza się funkcję (A, f, Y), czyli taką, która na zbiorze A jest określona dokładnie tym samym wzorem jakim była określona funkcja (X, f, Y). Będziemy ją nazywać obcięciem lub zawężeniem (tak, na to słowo też będę narzekać) funkcji f do zbioru A.

*Def.* O odwzorowaniu f: X 🡪 Y mówimy że jest

* przekształceniem identycznościowym zbioru X lub przekształceniem tożsamościowym zbioru X (oznaczenie idx), jeżeli X = Y oraz f(x) = x dla każdego x ∈ X
* suriekcją (suriektywne odwzorowanie X na Y), jeżli f(X) = Y
* iniekcją ( iniektywne, różnowartościowe, wzajemnie jednoznaczne), gdy spełnia warunek:  
   jeśli x1, x2 ∈ X i x1 ≠ x2, to f(x1) ≠ f(x2) lub, co jest równoznaczne, jeżeli   
   x1, x2 ∈ X i f(x1) = f(x2), to x1 = x2
* bijekcją (bijektywne), jeżeli jest ono jednocześnie suriekcją i iniekcją

***Uwaga!*** Jeżeli odwzorowanie f: X 🡪 Y jest bijekcją, to w naturalny sposób określone jest odwzorowanie f(???): Y 🡪 X (obrazek powyżej. Ja będę to zapisywać jako -1), wzorem jeśli y = f(x), to   
x=f-1(y), tzn. elementowy y ∈ Y przyporządkowuje się też element x ∈ X, którego obrazem przy odwzorowaniu f jest y. Funkcją f-1 nazywamy funkcję odwrotną do funkcji f.

Bogatym źródłem otrzymywania nowych funkcji, jak i sposobem rozkładu funkcji złożonych na prostsze jest operacja odkładania odwzorować.

 Jeśli odwzorowanie f: X 🡪 Y i g: Y 🡪 Z są takie, że jedno z nich jest określone na zbiorze wartości drugiego, to można zbudować nowe odwzorowanie  
 *g = f = X 🡪 Z*  
którego wartości na elementach zbioru X określone są za pomocą wzoru *(g ° f)(x) = g(f(x)).*Skonstruowane odwzorowanie g *° f nazywamy złożeniem (superpozycją) odwzorowań f i g.*Operacja składania jest łączna.

***???(temat…?Lemat?).*** Jeżeli , to h ° (g ° f) = (h ° g) ° f.

***Uwaga!*** Na ogół f ° g ≠ g ° f. Np. jeżeli f(x) = 2x i g(x) = x2 to (f ° g)(x) = 2x2, podczas gdy (g ° f)(x) = 4x2.

***Tw.*** Złożenie surjekcji jest surjekcją, złożenie iniekcji jest iniekcją, a zatem złożenie bijekcji jest bijekcją.

*Dowód.* Jeżeli , to (g ° f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z.   
 Ponadto jeżeli (g ° f)(x1) = (g ° f)(x2), to g(f(x1)) = g(f(x2)).  
 Stąd f(x1) = f(x2), a więc x1 = x2.

***Podstawowe struktury algebraiczne***

Wprowadzimy pojęcie grupy (podgrupy), pierścienia (podpierścienia), ciała (podciała).

*Def.* Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Działaniem w zbiorze X nazywamy każdą funkcję f: X × X 🡪 X, np. w zbiorze liczb naturalnych N działaniami są funkcje określone w następujący sposób:

f(m, n) = m + n, g(m, n) = m \* n. Nie jest natomiast funkcja określona wzorem h(m, n) = m – n.

*Def.* Grupą nazywamy niepusty zbiór G, w którym określone jest działanie: G × G 🡪 G, zwane działaniem grupowym (lub mnożeniem w G) spełniające następujące warunki:

* dla dowolnych a, b, c ∈ G zachodzi równość a\* (b \* c) = (a \* b) \*c – łączność działania w zbiorze G
* istnieje element e ∈ G, zwany elementem neutralnym grupy (lub jedynką grupy) takim, że dla każdego elementu a ∈ G mamy   
   *a \* e = e \* a = a*
* dla dowolnego elementu a ∈ G istnieje element b ∈ G zwany elementem odwrotnym do a taki, że   
   *a \* b = b \* a = e* (tak, wiem, pewnie już tutaj się pogubiliście)  
  Jeżeli ponadto spełniony jest warunek
* dla dowolnych a, b ∈ G mamy*a \* b = b \* c*to grupę G nazywamy grupą przemienną lub abelową (tak, na pewno abelową, sprawdziłam). Jeśli liczba elementów grupy G jest skończona, to nazywamy ją rzędem grupy G. Jeśli zbiór G jest nieskończony, to mówimy że rzęd grupy G jest nieskończony.

***Uwaga!*** W powyższej definicji operowaliśmy terminologią multiplikatywną ( nie należy mylić działania grupowego z mnożeniem liczb!!!). Zgodnie z tradycją wartość działania na parze (a, b) zapisujemy w postaci a\*b (w prezentacji była kropka zamiast gwiazdki) lub ab, natomiast element neutralny grupy oznaczamy symbolem 1 (więc to chyba 1). W grupach abelowych przyjęto się stosować terminologię addytywną. Wówczas działanie oznaczamy symbolem + (nie należy mylić działania grupowego z dodawaniem liczb!!!). Wartość działania + na parze (a, b) oznaczamy przez a + b, element neutralny przez O/U ,zaś element odwrotny do a przez -a (element przeciwny do a)

***???(Temat? Lemat?)*** Niech G będzie grupą. Wtedy

* element neutralny grupy G jest tylko jeden
* każdy element a ∈ G posiada dokładnie jeden b ∈ G (element odwrotny) taki, że   
  ab = ba = e  
   *Dowód.* Przypuśćmy że poza elementem neutralnym e ∈ G istnieje element neutralny e’ ∈ G i e ≠ e’. Wówczas e = e\*e’, ale e jest elementem neutralnym, więc c’ = e\*e’. Z tych równości otrzymujemy że c = e’  
   (był też drugi dowód, ale przepraszam, tak bardzo nie chcę go pisać)

***Uwaga.*** Dla każdego a ∈ G mamy (a-1)-1 = a

***Lemat/whatever*** Dla dowolnych a, b ∈ G zachodzi równość (ab)-1 = b-1a-1  
 *Dowód.* Mamy:  
 (b-1a-1)(ab) = b-1b = e  
 (ab)(b-1a-1) = aa-1 = e  
 czyli (ab)-1 = b-1a-1

W prezentacji są dalej jeszcze przykłady, ale to już samemu można sprawdzić (po prostu je tutaj wkleję na kolejnej stronie

